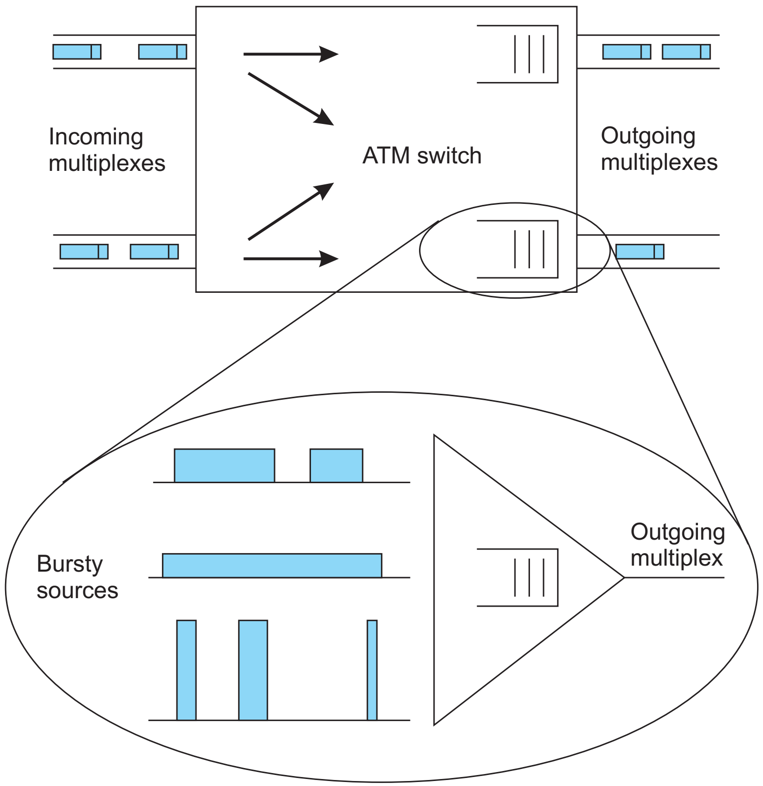
SOLUTASON JONOT

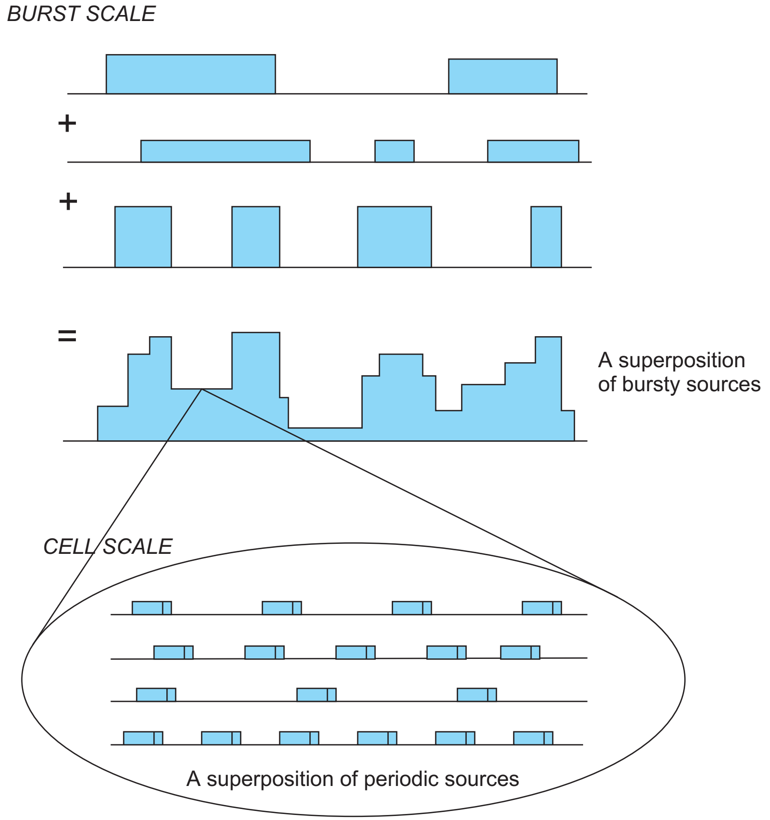
- Solutason aikaskaala on lyhyt
  - liikenteen hitaammat (pursketason) vaihtelut eivät ehdi vaikuttaa
  - purskekokoonpanoa voidaan pitää vakiona
  - kunkin liikennelähteen voidaan katsoa tuottavan soluja vakiovälein
  - eri lähteet eri nopeuksilla; nopeus voi olla myös nolla purskeen ollessa sammuksissa
- Solutasolla suurin kiinnostus kohdistuu puskurien jonojen lyhytaikaiseen käyttäytymiseen
  - jonomallit $M/D/1$ ja $N*D/D/1$
- Päätehtävänä on puskurin jononpituusjakauman määrääminen
  - ratkaisemiseen käytetään ns. Benešin menetelmää
  - tuloksia voidaan soveltaa puskurien mitoitukseen
  - purskekokoonpanon vaihdellessa hitaammassa aikaskaalassa lyhyaikainen jononpituusjakauma vaihtelee parametrisesti
- Myös HOL-eston (Head of Line -esto) määrääminen kuuluu solutason tarkasteluihin

Solutason liikenne[1]

ATM-kytkin



Purske- ja soluaikaskaalat



[1]Kuvat J. Robertsin mukaan

Benešin menetelmä $G/D/1$-jonoille

- $G/D/1$-malli soveltuu ATM-verkoille
  - solu on vakiomittainen
  - palveluaika eli lähetysaika linkille on vakio
  - saapumisprosessi on yleinen
  - esim. $M/D/1$ tai $N{*}D/D/1$
- Benešin menetelmää varten johdetaan ensin ns. Reichin tulos

Reichin tulos

Tarkastellaan yhden palvelimen jonoa

$$\begin{cases} X_t & = \text{jonossa hetkellä } t \text{ oleva tekemätön työ (puskurin sisältö)} \\ A(s,t) & = \text{systeemiin välillä } (s,t) \text{ saapuva työ} \\ c & = \text{jonon palvelunopeus} \end{cases}$$

$$\boxed{X_t = \sup_{s<t}(A(s,t) - c(t-s))}$$

Reichin tulos

- $A(s,t)$ on välillä (s,t) saapunut työ
- $c(t-s)$ on kyseisellä välillä purettavissa oleva suurin mahdollinen työ

Näiden erotukselle on mukava ottaa käyttöön oma merkintä

$$\boxed{\Delta(s,t) = A(s,t) - c(t-s)}$$

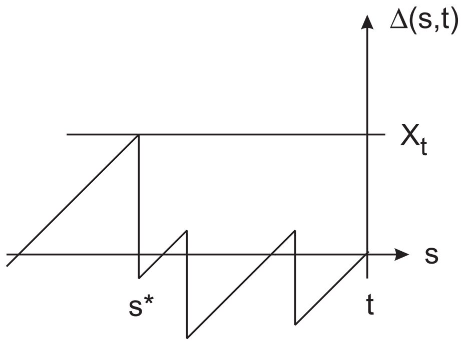
välillä (s,t) saapunut <u>ylimäärätyö</u> eli <u>liikatyö</u>;
työ, joka väistämättä jää varastoon

Tämän avulla kirjoitettuna Reichin tulos kuuluu

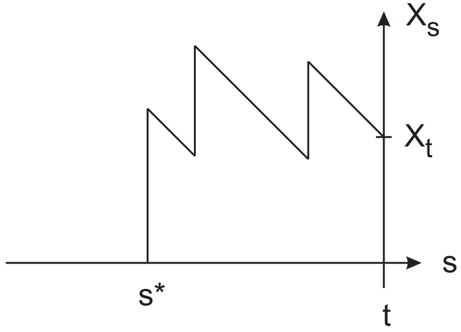
$$\boxed{X_t = \sup_{s<t}\Delta(s,t)}$$

Jononpituus hetkellä t on kaikkien hetkeä t edeltäneiden aikaikkunoiden yli laskettujen liikatöiden maksimi.

Reichin tulos (jatkoa)



Liikatyö $\Delta(s,t)$ välin alkuhetken s funktiona



Jononpituusprosessi X_s

Reichin tuloksen todistus: Kaikilla arvoilla $s < t$ pätee

$$X_t \geq A(s,t) - c(t-s) = \Delta(s,t) \qquad \text{jonossa hetkellä } t \text{ on vähintään välin } (s,t) \text{ liikatyö}$$

Merkitään s^*:llä viimeistä ajanhetkeä ennen hetkeä t, jolloin jono oli tyhjä (stabiili jono on aina joskus tyhjä). Tällöin pätee

- Palvelin on käynnissä koko välin (s^*, t) ja tehty työ on $c(t - s^*)$.
- $X_t = \underbrace{X_{s^*}}_{0} + \underbrace{A(s^*,t)}_{\text{saapunut työ}} - \underbrace{c(t-s^*)}_{\text{poistunut työ}} = \Delta(s^*,t)$

Siten pisteessä s^* puoliepäyhtälö toteutuu yhtälönä.
$\Delta(s,t)$ saavuttaa (s:n funktiona) pisteessä s^* maksimin: $X_t = \sup_{s<t} \Delta(s,t) = \Delta(s^*,t)$.

Reichin tulos (jatkoa)

Seuraus

Välitön seuraus epäyhtälöstä

$$X_t \geq A(s,t) - c(t-s) = \Delta(s,t) \quad \forall s < t$$

on

$$\mathrm{P}\{X_t > x\} \geq \mathrm{P}\{\Delta(s,t) > x\} \quad \forall s < t$$

sillä aina silloin kun $\Delta(s,t) > x$, on epäyhtälön mukaan myös $X_t > x$, joten jälkimmäisen tapauksen todennäköisyys on vähintään yhtä suuri kuin edellisen.

Suure $\mathrm{P}\{X_t > x\}$ on jonopituuden (tekemättömän työn) häntäjakauma. Tälle on saatu eräs alaraja. Koska alaraja pätee kaikille arvoille $s < t$, pätee myös tiukin alaraja

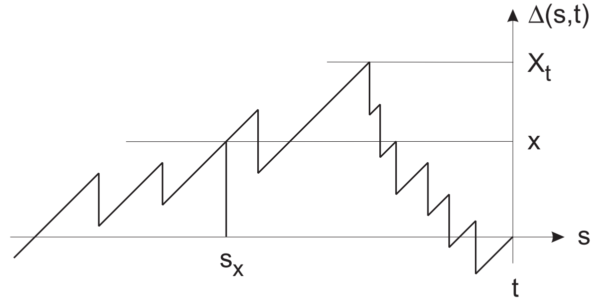
$$\mathrm{P}\{X_t > x\} \geq \sup_{s<t} \mathrm{P}\{\Delta(s,t) > x\}$$

Tämä yksinkertainen alaraja antaa usein hyödyllistä informaatiota jonopituusjakaumasta.

Benešin menetelmä

Halutaan laskea jononpituuden X_t komplementaarinen jakauma

$$Q(x) = \mathrm{P}\{X_t > x\}$$



- Reichin tuloksen mukaan ehto $\{X_t > x\}$ merkitsee sitä, että $\Delta(s,t)$:n maksimi (s:n funktiona) on x:n yläpuolella.
- Toisaalta stabiilissa jonossa pitkällä aikavälillä työtä ei voi tulla enemmän kuin sitä kyetään tekemään, vaan $\lim_{s\to-\infty} \Delta(s,t) = -\infty$ (todennäköisyydellä 1).

Siten jokaiseen realisaatioon, jolla $X_t > x$, liittyy yksikäsitteisesti määritelty varhaisin ajanhetki s_x, missä liikatyön kuvaaja leikkaa tason x,

$$s_x = \inf\{s \le t : \Delta(s,t) = x\}$$

Tapaus $\{X_t > x\}$ voidaan siten osittaa sen mukaan, missä s_x sijaitsee. Yksi osituksen tapaus on $s_x \in (s, s+ds)$ tai lyhyemmin $s_x \in ds$. Kokonaistodennäköisyyden kaava antaa

$$\boxed{\mathrm{P}\{X_t > x\} = \int_{s<t} \mathrm{P}\{s_x \in ds\}}$$

Benešin menetelmä (jatkoa)

Tason x ensimmäisen ohituksen hetkeä s_x karakterisoi kaksi ominaisuutta

a) $\Delta(s_x, t) = x$ (taso x ohitetaan hetkellä s_x)

b) $\Delta(s, t) < x, \quad \forall s < s_x$ (tasoa x ei ohiteta ennen hetkeä s_x)

Helposti nähdään, että liikatyö on peräkkäisten välien suhteen additiivinen, joten

$$\Delta(s, t) = \Delta(s, s_x) + \Delta(s_x, t) \qquad \text{kun } s \le s_x \le t$$

Tällöin ylläolevista ehdoista seuraa

$$\Delta(s, s_x) < 0, \quad \forall s < s_x$$

Tämä merkitsee Reichin tuloksen perusteella sitä, että jono hetkellä s_x on tyhjä.
Ominaisuus b) voidaan siten korvata ominaisuudella

b') $X_{s_x} = 0$

Benešin menetelmä (jatkoa)

Olettaen lisäksi, että $\Delta(s,t)$ on paloittain jatkuva s:n funktio

- esim. diskreettien saapumisten tapauksessa kuvaaja on paloittain jatkuva sahalaitakäyrä

saadaan lopulta Benešin tulos

$$\boxed{\mathrm{P}\{X_t > x\} = \int_{s<t} \mathrm{P}\{\Delta(s,t) < x \le \Delta(s+ds,t),\ X_s = 0\}}$$

- Ensimmäinen ehto sanoo sen, että taso x ohitetaan välissä $(s, s+ds)$.
- Toinen ehto, $X_s = 0$, on ehto sille, että tasoa x ei ole saavutettu ennen hetkeä s.

Benešin menetelmä tässä muodossa ei ole vielä eksplisiittinen ratkaisu jononpituusjakaumalle, vaan ongelman uudelleenmuotoilu.

- Todennäköisyyslausekkeessa esiintyy edelleen itse jonoon liittyvä ehto $X_s = 0$.

Benešin menetelmä on kuitenkin erittäin hyödyllinen

- Tulos on täysin yleinen; saapumisprosessista ei ole tehty mitään oletuksia.
- Joissakin tapauksissa se johtaa eksplisiittiseen, eksaktiin tulokseen.
- Usein sen avulla voidaan johtaa hyödyllisiä approksimaatioita tai ylärajoja.

Benešin menetelmä (jatkoa)

Benešin tulos voidaan kirjoittaa moneen eri muotoon.

- Erityisesti kun järjestelmä rajoitetaan johonkin erityiseen tapaukseen, Benešin tulokselle saadaan konkreettisemman näköisiä muotoja.

Usein voidaan yleisyyden kärsimättä merkitä jonon tarkasteluhetkeä 0:lla (sen sijaan, että edellä se on ollut hetki t). Hetki 0 voi

- edustaa satunnaista ajanhetkeä
- mutta se voi olla saapumiskuvioon nähden jokin erityisesti valittu ajanhetkikin; Benešin tulos jononpituudelle pätee silloinkin, kun tarkasteluhetki ei edusta tasapainotilannetta

Kun jonopituutta tarkastellaan hetkellä 0, on mukavaa merkitä $\Delta(s) = \Delta(-s, 0)$

- kun liikatyöfunktiossa on vain yksi argumentti, sillä tarkoitetaan s:n pituisessa aikaikkunassa ennen hetkeä 0 saapunutta liikatyötä
- s on nyt positiivinen luku, ja välin alkupiste on $-s$

Myös ajanhetken määrittelevä indeksi voidaan haluttaessa jättää pois, $X_0 = X$.

Näitä merkintäsopimuksia käyttäen Benešin tulos kuuluu

$$\boxed{\mathrm{P}\{X_0 > x\} = \int_0^\infty \mathrm{P}\{\Delta(s) > x \geq \Delta(s + ds),\ X_{-s} = 0\} ds}$$

Jononpituusjakauman yläraja

Benešin menetelmän 'vaikeus' on siinä, että todennäköisyyslausekkeessa esiintyy jononpituusehto $X_{-s} = 0$.

Koska tämä on rajoittava lisäehto, niin jättämällä yksinkertaisesti ehto pois todennäköisyys kasvaa (ei pienene).

Näin saadaan jononpituusjakaumalle yläraja

$$\boxed{\mathrm{P}\{X_0 > x\} \le \int_0^\infty \mathrm{P}\{\Delta(s) > x \ge \Delta(s + ds)\}ds}$$

Tämä jonopituusjakaumaa koskeva ylärajatulos on eksplisiittinen siinä mielessä, että niin pian kuin saapumisprosessi on spesifioitu, integrandissa esiintyvä todennäköisyys voidaan periaatteessa määrätä ja integraali laskea.

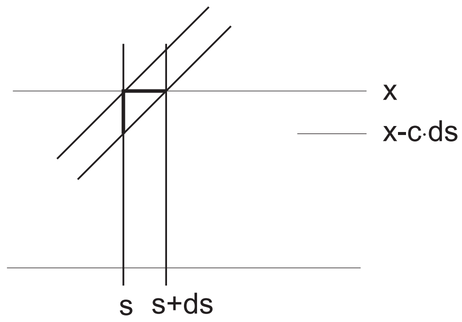
Benešin tulos diskreettien saapumisten tapauksessa

Edellä annettu Benešin tulos pätee mille tahansa saapumisprosessille, myös sellaiselle, jossa työtä saapuu jatkuvana nestevirtana;

- nestekuvaus on hyvä malli tarkasteltaessa pursketason jonoilmiöitä; käsitellään myöhemmin

Perinteisissä jonomalleissa saapumisprosessi on pisteprosessi;

- saapumiset tapahtuvat tiettyinä diskreetteinä ajanhetkinä
- jokainen saapuminen tuo jonoon äärellisen määrän työtä



Koska liikatyön kuvaaja on melkein kaikkialla kalteva suora, jonka kulmakerroin on c, on kuvan mukaisesti ehto sille, että taso x ylittyy välissä $(s, s + ds)$ ekvivalentti sen kanssa, että hetkellä s liikatyön arvo $\Delta(s, 0)$ on välissä $(x - c \cdot ds, x)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_t > x\} &= \int_{s<t} \mathrm{P}\{\Delta(s,t) \in (x - c \cdot ds, x), X_s = 0\} \\
&= \int_{s<t} \mathrm{P}\{\Delta(s,t) \in (x - c \cdot ds, x) \,|\, X_s = 0\} \mathrm{P}\{X_s = 0\} \\
&= \int_{s<t} \mathrm{P}\{A(s,t) \in (x + c(t-s)) - c \cdot ds, x + c(t-s) \,|\, X_s = 0\} \mathrm{P}\{X_s = 0\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}\{X_0 > x\} = c \int_0^\infty f_{A(s)}(x + c \cdot s \,|\, X_{-s} = 0)\, \mathrm{P}\{X_{-s} = 0\} ds}$$

$f_{A(s)}(x \,|\, X_{-s} = 0)$ on ehdolla $X_{-s} = 0$ aikaikkunassa $(-s, 0)$ saapuvan työn tiheysfunktio

Benešin tulos $G/D/1$-jonolle

Nyt jonosysteemiä rajoitetaan vielä tarkemmin.

- Saapumiset ovat diskreettejä, saapumisprosessin ollessa edelleen täysin yleinen
- Oletetaan vakiopalveluaika eli jokainen asiakas tuo jonoon saman määrän työtä
  - esim ATM-solu; malli sopiikin hyvin ATM-verkon solutason kuvaukseen

Otetaan yhden asiakkaan (solun) työn määrä työn yksiköksi ja asiakkaan (vakio)palveluaika ajan yksiköksi (jolloin $c = 1$; palvelin tekee työtä yhden työyksikön valitussa aikayksikössä). Tällöin

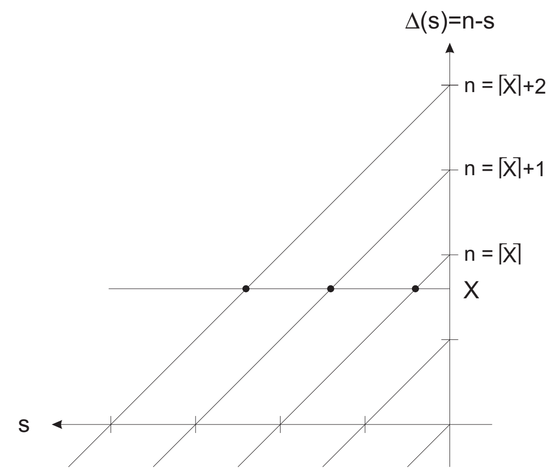
$$\begin{cases} A(s) = \nu(s) & \text{(saapumisten lukumäärä aikavälissä } (-s, 0)) \\ \Delta(s) = \nu(s) - s & \end{cases}$$

Satunnaismuuttuja $\nu(s)$ on kokonaislukuarvoinen.

Tason x ohitusehto $\Delta(s) = x$, voi toteutua vain sellaisilla arvolla s, jotka ovat muotoa $n - x$, missä n on kokonaisluku (pitää tietenkin olla $n > x$).

Mahdolliset ohitustilannetta vastaavat välinpituudet s_x muodostavat siten diskreetin, ykkösvälisen hilan

$$s_x = n - x, \qquad n > x$$



Benešin tulos $G/D/1$-jonolle (jatkoa)

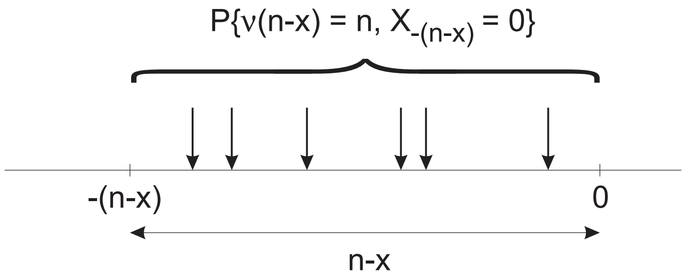
Hilapisteessä $n - x$ ohitusehto kuuluu

$\nu(n-x) = n$ välissä, jonka pituus on $n - x$ pitää tulla n saapumista; liikatyö ko. välissä on silloin $n - (n - x) = x$

Tapauksen $X_0 > x$ ositus tason x ensiohituksen sijainnin mukaan pelkistyy nyt numeroituvaksi joukoksi diskreettejä osatapauksia.

Vastaavasti aikaisemmin esitetty kokonaistodennäköisyysintegraali palautuu summaksi mahdollisten ohituspisteiden muodostaman diskreetin hilan yli:

$$\boxed{\mathrm{P}\{X_0 > x\} = \sum_{n>x} \mathrm{P}\{\nu(n-x) = n,\ X_{-(n-x)} = 0\}}$$

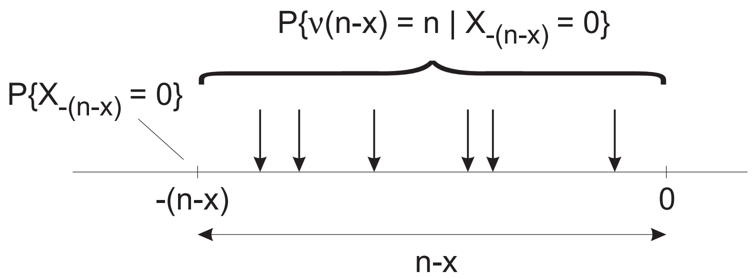


Summa muotoa $n - x, (n > x)$ olevien hilapisteiden eli pisteiden $\lceil x \rceil - x, \lceil x \rceil - x + 1, \lceil x \rceil - x + 2, \ldots$ yli, missä $\lceil x \rceil$ on pienin kokonaisluku, joka $\geq x$.

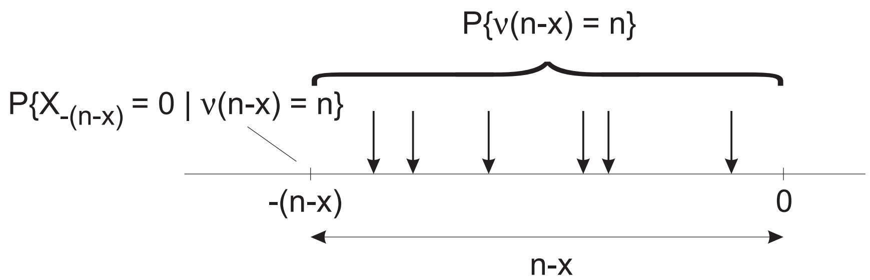
Benešin tulos $G/D/1$-jonolle (jatkoa)

Tulos voidaan kirjoittaa ehdollistamalla kahteen eri muotoon:

$$\boxed{\mathrm{P}\{X_0 > x\} = \sum_{n>x} \mathrm{P}\{\nu(n-x) = n \,|\, X_{-(n-x)} = 0\}\mathrm{P}\{X_{-(n-x)} = 0\}}$$

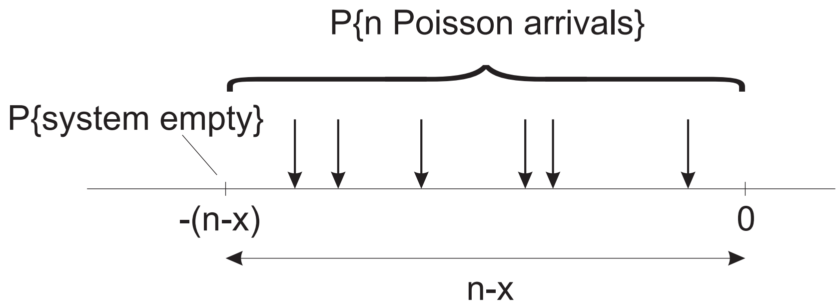


$$\boxed{\mathrm{P}\{X_0 > x\} = \sum_{n>x} \mathrm{P}\{X_{-(n-x)} = 0 \,|\, \nu(n-x) = n\}\mathrm{P}\{\nu(n-x) = n\}}$$



$M/D/1$-jono

- Saapumiset tapahtuvat Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ.
- Kuorma $\rho = \lambda \cdot d$, missä d $(= 1)$ on palveluaika.
- Saapumisten lukumäärä $\nu(n-x)$ aikavälissä $n-x$ (palveluaikaa) on Poisson-jakautunut keskiarvolla $\rho(n-x)$,
$$\mathrm{P}\{\nu(n-x) = n\} = \frac{(\rho \cdot (n-x))^n}{n!}\, e^{-\rho \cdot (n-x)}$$
- Mielivaltaisella ajanhetkellä jono on tyhjä todennäköisyydellä $1-\rho$.
- Poisson-saapumiset välissä $(-s, 0)$ ovat riippumattomia saapumisista ennen hetkeä $-s$ ja siten jononpituudesta X_{-s}: yhteistodennäköisyys hajoaa tuloksi.



$M/D/1$-jono (jatkoa)

Jononpituusjakauma $Q(x) = \mathrm{P}\{X_0 > x\}$ saadaan erikoistapauksena $G/D/1$-jonon kaavasta

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_{n>x} \mathrm{P}\{\nu(n-x) = n,\ X_{-s} = 0\} \\
&= \sum_{n>x} \mathrm{P}\{\nu(n-x) = n\} \cdot \mathrm{P}\{X_{-s} = 0\} \\
&= \sum_{n>x} \frac{(\rho \cdot (n-x))^n}{n!} e^{-\rho \cdot (n-x)} \cdot (1-\rho)
\end{aligned}$$

Käyttämällä hyväksi tunnettua algebrallista identiteettiä ja valitsemalla $a = -\rho x$ ja $b = \rho$

$$(1-b)\sum_0^\infty \frac{(a+n\cdot b)^n}{n!} e^{-(a+n\cdot b)} = 1 \quad \Rightarrow \quad (1-\rho)\sum_0^\infty \frac{(\rho\cdot(n-x))^n}{n!} e^{-\rho\cdot(n-x)} = 1$$

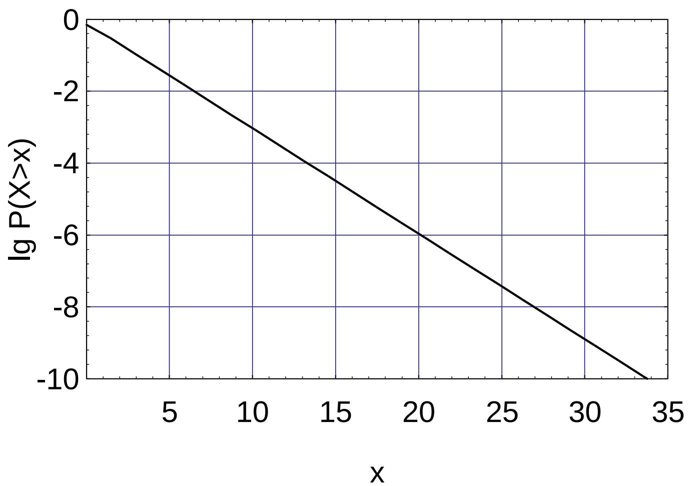
ääretön summa voidaan vaihtaa äärelliseksi (ykkösen komplementti) ja saadaan lopputulos

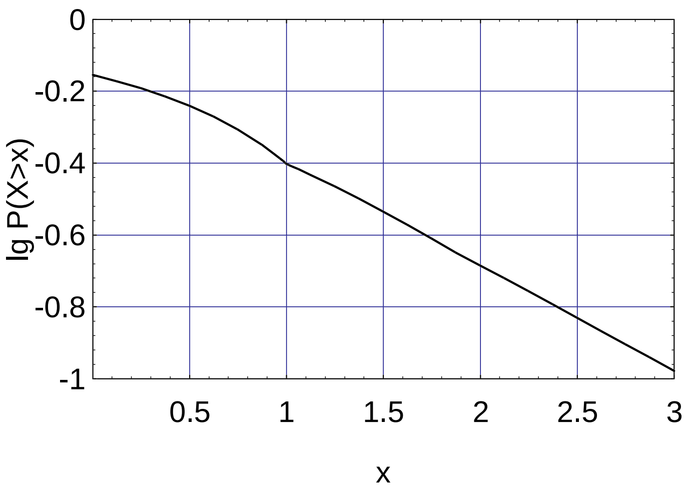
$$\boxed{Q(x) = 1 - (1-\rho)\sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{(\rho\cdot(n-x))^n}{n!} e^{-\rho\cdot(n-x)}}$$

$M/D/1$ jono (jatkoa)

$M/D/1$-jonon komplementaarinen jakauma $Q(x) = \mathrm{P}\{X > x\}$ riippuu vain yhdestä parametrista, nimittäin kuormasta ρ.

- Jakauma on hyvin lähellä eksponentiaalista jakaumaa (logaritmiasteikolla suora), kuten näkyy allaolevista kuvaajista tapauksessa $\rho = 0.7$.





- Asymptoottisesti (x suuri) jakauma todellakin lähestyy eksponenttifunktiota vakio $\cdot\, e^{s \cdot x}$
  - poikkeama eskponenttifuntiosta voidaan havaita vain pienillä arvoilla x
  - eksponentin kerroin s (negatiivinen) on jäljempänä esitettävän Lapalce-muunnoksen napa eli se toteuttaa seuraavan transkendenttiyhtälön: $\rho(e^{-s} - 1) + s = 0$
  - raskaalla kuormalla, kun $\rho \approx 1$, pätee likimain $s = -2(1 - \rho)/\rho$

Asiakkaiden lukumäärä $M/D/1$-jonossa

On johdettu kaava jonossa olevan tekemättömän työn X jakaumalle.

On kiinnostavaa tietää myös jonossa olevien asiakkaiden lukumäärän N jakauma. Tämä saadaan hyvin yksinkertaisesti edellisestä tuloksesta, kun huomataan, että

$$N = \lceil X \rceil$$

Jos esim. $X = 4.7$, niin 4 asiakasta on odottamassa ja yksi palveltavana; järjestelmässä on siten $5 = \lceil 4.7 \rceil$ asiakasta

Nähdään, että kokonailuvuilla n pätee

$$\{N > n\} \equiv \{X > n\}$$

Siten on

$$\boxed{\mathrm{P}\{N > n\} = \mathrm{P}\{X > n\} = Q(n)}$$

Lukumäärän häntäjakauma saadaan suoraan tekemättömän työn häntäjakaumasta kokonaislukupisteissä.

$M/D/1$-jono Pollaczek-Khinchinin kaavan mukaan

Pollaczek-Khinchinin kaava tekemättömän työn X jakauman (tiheysfunktion) Laplace-muunnokselle $X^*(s)$ kuuluu

$$X^*(s) = \frac{1-\rho}{1-\rho\,\dfrac{1-S^*(s)}{s\cdot \mathrm{E}[S]}}$$

missä S on palveluaika ja $S^*(s)$ sen (tiheysfunktion) Laplace-muunnos

$M/D/1$-jonon tapauksessa on $S = \text{vakio} = d \; (=1)$, joten

$$\boxed{X^*(s) = \frac{1-\rho}{1-\rho\,\dfrac{1-e^{-s}}{s}}}$$

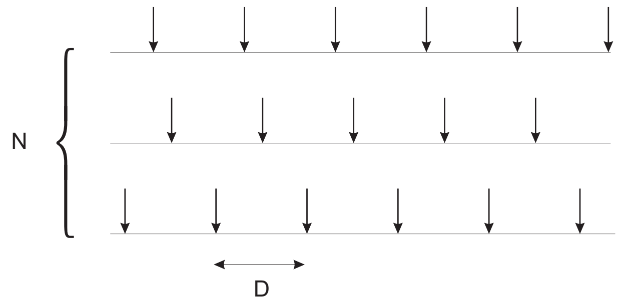
Benešin menetelmällä edellä johdettu lauseke voidaan johtaa myös Pollaczek-Khinchinin kaavasta suorittamalla Laplace-käänteismuunnos.

Laplace-muunnoksesta voidaan helposti johtaa momentit

$$\boxed{\mathrm{E}[X] = \frac{\rho}{2\,(1-\rho)}} \qquad \boxed{\mathrm{V}[X] = \frac{\rho(1-(\frac{\rho}{2})^2)}{3\,(1-\rho)^2}}$$

$N*D/D/1$-jono

$N*D$-saapumisprosessi



- N toisistaan riippumatonta lähdettä
- Kukin lähde on jaksollinen periodilla D
  - yksi saapuminen D:n välein
  - vaiheet jakson D sisällä arvotaan satunnaisesti

Jokainen saapumisprosessin realisaatio (vaiheet arvottu) on periodinen:

- N saapumista kussakin jaksossa D
- Saapumiset tapahtuvat kaikissa jaksoissa samoissa paikoissa.

$N*D$-saapumisprosessissa saapumiset ovat lyhyellä välillä negatiivisesti korreloituneita:

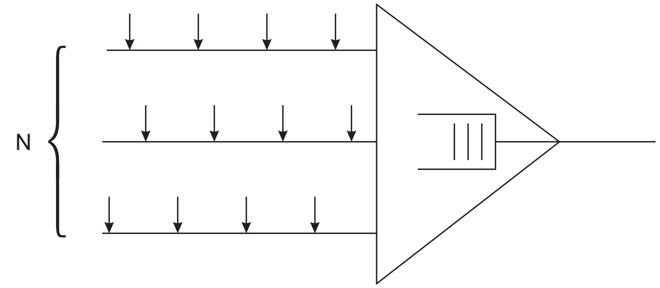
- Jos juuri on tapahtunut yksi saapuminen, niin ajan D sisällä samasta lähteestä ei tule toista saapumista.

Pitkällä aikavälillä saapumiset ovat positiivisesti korreloituneita:

- Jos juuri on tapahtunut yksi saapuminen, niin tiedetään että uusi saapuminen tapahtuu ajan D kuluttua, ajan $2D$ kuluttua jne.

$N*D/D/1$-jono (jatkoa)

Kun palveluaika on vakio:



- Kukin lähde tuo yhden yksikön työtä jaksossa D.
- Käytetään ajan yksikkönä työyksikön palveluun kuluvaa aikaa. (tällöin D on paljas reaaliluku).
- Jonon kuorma on $\rho = N/D$.

$N*D/D/1$-jono on hyvä malli esim. ATM-kytkimen ulostulopuskurille, kun kyseisen puskurin kautta on muodostettu N kpl VC-yhteyksiä, joista kussakin kulkee dataa suunnilleen samalla nopeudella.

Haluttaessa selvittää esimerkiksi jononpituusjakaumaa, ei olla niinkään kiinnostuneita jonopituuden vaihteluista yksittäisessä realisaatiossa, vaan (ensemble)jakaumasta kaikkien realisaatioiden yli, jossa otetaan huomioon vaiheiden satunnaisuus.

Seuraavassa on mukavaa tarkastella hetkellä 0 alkavaa jaksoa ja tarkastella tekemättömän työn arvoa, X_D, välin loppupisteessä (mielivaltainen ajanhetki).

Tehtävänä on johtaa X_D:n häntäjakauma $Q(x) = \mathrm{P}\{X_D > x\}$.

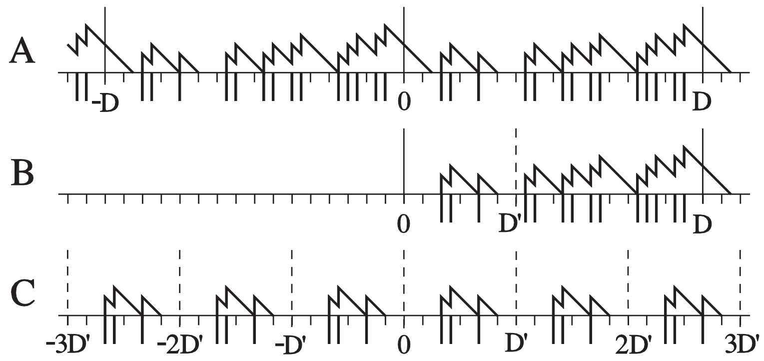
$N * D/D/1$-jono: systeemin modifiointi

Mielivaltaisessa pisteessä D vallitsevan jononpituuden (tekemätön työ) X_D:n häntäjakauma $Q(x) = \mathrm{P}\{X_D > x\}$ voidaan ratkaista eksaktisti Benešin menetelmä avulla.

Tätä varten järjestelmää modifioidaan kaksi kertaa peräkkäin.

Modifiointi perustuu seuraavaan avainhavaintoon:

- Stabiilissa jonossa on $N < D$ ja systeemi on aina välillä tyhjä.
- Jaksollisuuden vuoksi jono on tyhjä jonain ajanhetkenä jokaisessa jaksossa, mm. välillä $(0, D)$.
- Jono hetkellä D on peräisin saapumisista välillä $(0, D)$
- X_D ei muutu miksikään vaikka saapumiset ennen hetkeä 0 'kytketään pois'



Järjestelmän A asemesta voidaan laskea X_D:n jakautuma järjestelmälle B.
Sovelletaan seuraavaksi Benešin mentelmää X_D:n jakauman selvittämiseksi järjestelmässä B.

$N*D/D/1$-jono: jononpituus järjestelmässä B

Sovelletaan yleistä Benešin tulosta $G/D/1$-jonoille ehdollistetussa muodossa

$$Q(x) = \mathrm{P}\{X_D > x\} = \sum_{x<n\leq N} \mathrm{P}\{\nu(D', D) = n\} \cdot \mathrm{P}\{X_{D'} = 0 \,|\, \nu(D', D) = n\}$$

missä

- $\nu(D', D)$ = saapumisten määrä välillä (D', D)
- $n - (D - D') = x$ eli $D' = D - n + x$; liikatyö välillä (D, D') on x

Summassa hilapistettä on merkitty D':lla.

- Kukin hilapiste D' identifioituu välin (D', D) saapumisten lukumäärän n perusteella.
- Välin pituus $D - D' = n - x$ määräytyy sen perusteella, että liikatyön arvo välissä on x.
- Jotta liikatyö voisi olla x:n suuruinen, täytyy saapumisten lukumäärän n välissä olla vähintään x (antaa summausalarajan).
- Toisaalta järjestelmässä B ennen hetkeä D on vain N saapumista, joten summaus voidaan lopettaa N:ään (ensimmäinen todennäköisyys on 0 suuremmilla arvoilla n).

$N*D/D/1$-jono: jononpituus järjestelmässä B (jatkoa)

Tutkitaan todennäköisyystekijöitä summassa

$$Q(x) = \sum_{x<n\leq N} \mathrm{P}\{\nu(D', D) = n\} \cdot \mathrm{P}\{X_{D'} = 0 \,|\, \nu(D', D) = n\}$$

Todennäköisyys sille, että D:n pituiseen jaksoon tasanjakautuneista N:stä saapumisesta täsmälleen n osuu osavälille (D', D), jonka pituus on $n - x$, saadaan binomijakaumasta:

$$\mathrm{P}\{\nu(D', D) = n\} = \binom{N}{n} \Big(\frac{n-x}{D}\Big)^n \Big(1 - \frac{n-x}{D}\Big)^{N-n}$$

$N*D/D/1$-jono: jononpituus järjestelmässä B (jatkoa)

Ehdollisen todennäköisyyden $\mathrm{P}\{X_{D'} = 0 \,|\, \nu(D', D) = n\}$ laskemiseksi käännetään saapumisprosessin katkaisumenettely vastakkaiseen suuntaan:

- Sillä ehdolla, että väliin (D', D) on tullut n saapumista, loput $N - n$ saapumista ovat tuleet väliin $(0, D')$.
- Kyseiset $N - n$ saapumista ovat tasanjakautuneita välissä $(0, D')$.
- Väli $(0, D')$ on alikuormitettu, sillä

$$N - n = N - (x + (D - D')) = -(D - N) - x + D' \le D'$$

- Saapumiset välissä $(0, D')$ voidaan laajentaa jaksolliseksi saapumisprosessiksi (jakso D')
  - alikuormitetussa (stabiilissa) periodisessa systeemissä jono on tyhjä jokaisessa välissä, siten myös välissä $(0, D')$
  - periodisella laajennuksella ei ole vaikutusta jononpituuteen $X_{D'}$
- Järjestelmän B tyhjänäolotodennäköisyys hetkellä D' voidaan laskea järjestelmästä C.
- Järjestelmän C kuorma on $\rho' = (N - n)/(D - n + x)$.
- Jonon C tyhjänäolotodennäköisyys hetkellä D' on sama kuin mielivaltaisella hetkellä

$$\mathrm{P}\{X_{D'} = 0 \,|\, \nu(D', D) = n\} = 1 - \frac{N - n}{D - n + x} = \frac{D - N + x}{D - n + x}$$

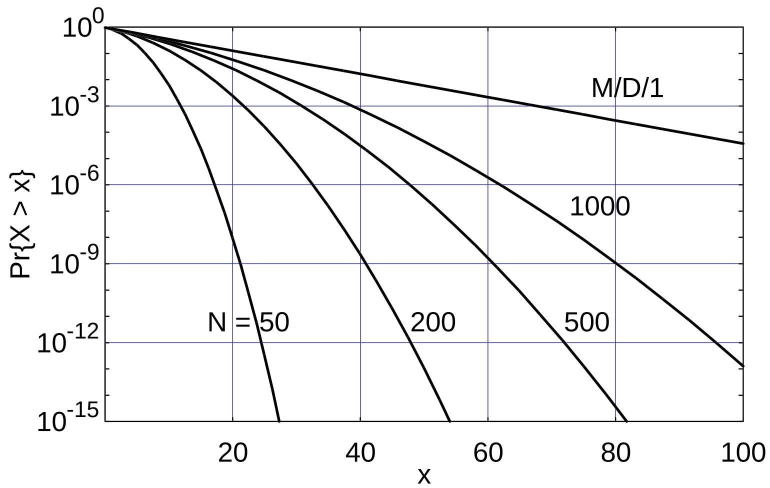
$N * D/D/1$-jono: jononpituusjakauma

Kokoamalla näiden tarkastelujen tulokset yhteen saadaan lopputulos

$$\boxed{Q_D^N(x) = \sum_{x<n\le N} \binom{N}{n} \Big(\frac{n-x}{D}\Big)^n \Big(1-\frac{n-x}{D}\Big)^{N-n} \frac{D-N+x}{D-n+x}}$$

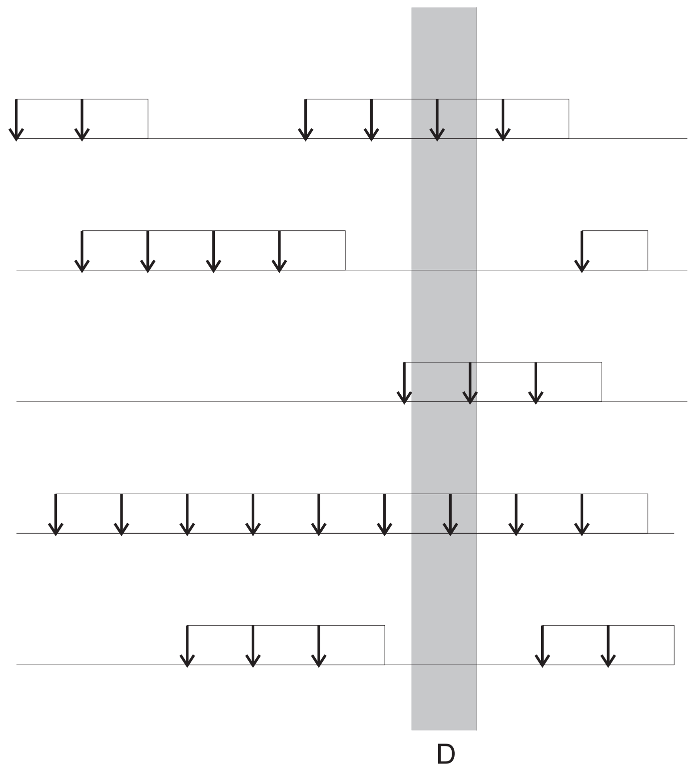
missä on merkitty näkyviin jononpituusjakauman $Q(x)$ riippuvuus parametreista N ja D.

- On saatu virtuaalisen odotusajan jakauma.
- Kokonaislukuisilla arvoilla x se antaa suoraan jonossa olevien solujen lukumäärän komplementaarisen jakauman.
- Solun *todellisen* odotusajan jakauma $N * D/D/1$-jonossa on sama kuin virtuaalisen odotusajan jakauma $(N-1) * D/D/1$-jonossa, jossa lähteiden määrä on yhtä pienempi, eli jakauma on $Q_D^{N-1}(x)$.



Jononpituusjakauma eri arvoilla N vakio kuormalla $\rho = N/D = 0.95$.

Moduloitu $N*D/D/1$-jono (tapaus $D \geq N$)



Tässäkin tapauksessa on N lähdettä.

Kukin lähde on päällä tai pois päältä (on/off) jonkun moduloivan prosessin säätelemänä. Kullakin lähteellä moduloiva prosessi voi olla erilainen.

Kun lähde on päällä, se lähettää soluja jaksollisesti vakiovälein, väli D.

Lähteen yhtenäistä päälläolojaksoa kutsutaan purskeeksi. Tässä käytetään seuraavaa tulkintaa. Purske

- alkaa solun saapumisella
- jatkuu ajan D viimeisen solun saapumisen jälkeen
- tällöin solujen väli aina $\geq D$

Lähteen i modulointiprosessista tarvitsee seuraavassa tuntea ainoastaan lähteen päälläolotodennäköisyys p_i.

Asetettu ehto $D \geq N$ merkitsee sitä, että vaikka kaikki lähteet olisivat jatkuvasti päällä, jono olisi stabiili. Nyt tarkastellussa moduloidussa jonossa ei siten voi lainkaan muodostua ns. pursketason jonoja.

Moduloitu $N*D/D/1$-jono, jatkoa ...

- Tarkastellaan jonoa hetkellä D (mielivaltainen).
- Systeemi on varmasti tyhjä jonain hetkenä välillä $(0, D)$.
  - pätee ilman modulointia
  - modulointi 'harventaa' saapumisia
- Saapumiset ennen hetkeä 0 voidaan jättää huomiotta.
- Sovelletaan Benešin tulosta typistettyyn järjestelmään.
- Ehdollistetaan laskenta hetkellä D päälläolevien lähteiden lukumäärään.
  - jokaisesta päälläolevasta lähteestä, ja vain niistä, tulee yksi saapuminen väliin $(0, D)$
  - tasanjakautunut ko. välillä

$$\mathrm{P}\{X > x\} = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}\{n \text{ lähdettä päällä}\} \cdot \sum_{x<k\leq n} \mathrm{P}\{\nu(D', D) = k \text{ ja } X_{D'} = 0 \,|\, n \text{ lähdettä päällä}\}$$

- Jälkimmäinen summa on sama kuin $Q_D^n(x)$
  - $N*D/D/1$-jonon häntäjakauma: n lähdettä, jakso D

Moduloitu $N * D/D/1$-jono, jatkoa ...

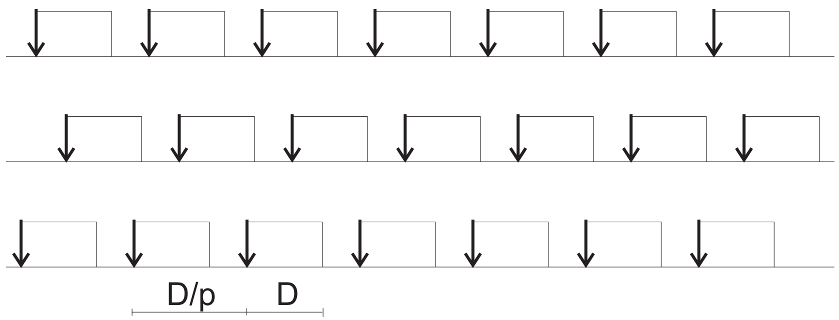
- Merkitään $P_n = \mathrm{P}\{n \text{ lähdettä päällä}\}$
  - Bernoulli(p_i)-muuttujien konvoluutio
- Näiden avulla lausuttuna saadaan moduloidulla saapumisprosessilla ‘moduloitu jononpituusjakauma’

$$\boxed{\mathrm{P}\{X > x\} = \sum_{n=0}^{N} P_n Q_D^n(x)}$$

- Tulos riippuu vain päälläolotodennäköisyyksistä p_i (P_n riippuu näistä)
  - ei moduloivien prosessien muista ominaisuuksista
- Tulos on eksakti
  - ei edellytä aikaskaalojen eroa
- Tuloksen pätevyyden kannalta oletus $D \geq N$ (ei pursketason ruuhkaa) on olennainen.

Moduloitu $N * D/D/1$-jono, jatkoa ...

- Oletetaan, että $p_i = p$
- P_n on binomijakautunut: $P_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$
- Summa $\sum_{n=0}^{N} P_n Q_D^n(x)$ voidaan laskea;
  - johtaa yksinkertaiseen tulokseen, joka voidaan myös päätellä
- Voidaan vapaasti valita mikä tahansa moduloiva prosessi
  - kunhan päälläolotodennäköisyys on p
- Eräs realisaatio on jaksollinen prosessi jaksolla D/p



- Voidaan tulkita:
  - purskeen kesto D
  - jakso D/p
  - päälläolotodennäköisyys $D/(D/p) = p$

$$\boxed{\mathrm{P}\{X > x\} = Q_{D/p}^N(x)}$$

Moduloitu $N*D/D/1$-jono, jatkoa ...

- Tällä päättelyllä on itse asiassa todistettu matemaattinen identiteetti

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} Q_D^n(x) = Q_{D/p}^N(x)$$

missä

$$Q_D^n(x) = \sum_{x<k\le n} \binom{n}{k} \left(\frac{k-x}{D}\right)^k \left(1 - \frac{k-x}{D}\right)^{n-k} \frac{D-n+x}{D-k+x}$$