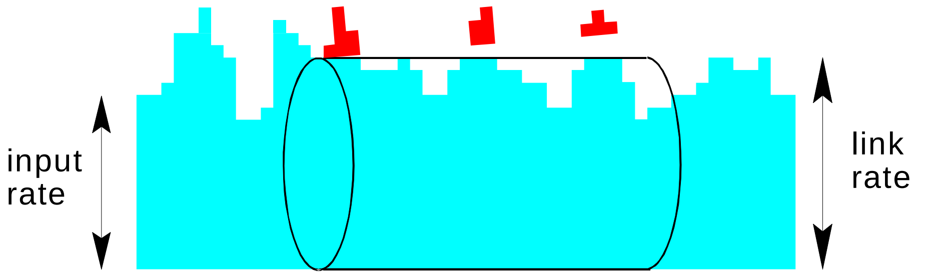
PURSKETASON TARKASTELUT

Ylivuototodennäköisyys puskurittomassa systeemissä

- Tarkastellaan ATM-kytkimen lähtöporttia
- Oletetaan:
  - puskuri riittää vain solutason puskurointiin
  - lähtöväylän kapasiteetti C
- Useita VC-yhteyksiä kulkee saman lähtöväylän kautta
  - yhteyksien yhteenlaskettu nopeus X
- Kapasiteetin C ylittävä osuus vuotaa yli
- Ylivuotovirta $(X - C)^+$
  - missä $(\cdot)^+ = \max(0, \cdot)$



Ylivuoto- ja saturaatiotodennäköisyys

- Ylivuototodennäköisyys
  - ylivuotavan virran suhde saapuvaan virtaan

$$P_{\text{loss}} = \frac{\mathrm{E}[(X-C)^+]}{\mathrm{E}[X]} = \frac{\int_C^\infty (x-C) f(x) dx}{\int_0^\infty x f(x) dx}$$

- Saturaatiotodennäköisyys

$$P_{\text{sat}} = \mathrm{P}\{X \geq C\}$$

  - todennäköisyys, että kapasiteetti ylittyy
  - usein hiukan helpompi laskea kuin P_{loss}
  - karkea yläraja P_{loss}:lle
  - yleensä pari dekadia suurempi kuin P_{loss}
  - ero ei ratkaiseva mitoituksen kannalta
  - häviöt riippuvat jyrkästi kapasiteetista
  - kapasiteetti muuttuu hitaasti häviötason mukana

Alkeellinen tarkastelu – normaaliapproksimaatio

- Linkillä kulkee n virtuaalikanavayhteyttä
  - samanlaiset, riippumattomat liikennevirrat

$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

- Merkitään

$$\begin{cases} m & = \text{ yhden virran keskinopeus, } \mathrm{E}[X_1], \\ \sigma^2 & = \text{ yhden virran nopeuden varianssi, } \mathrm{V}[X_1]. \end{cases}$$

- Vastaavsti

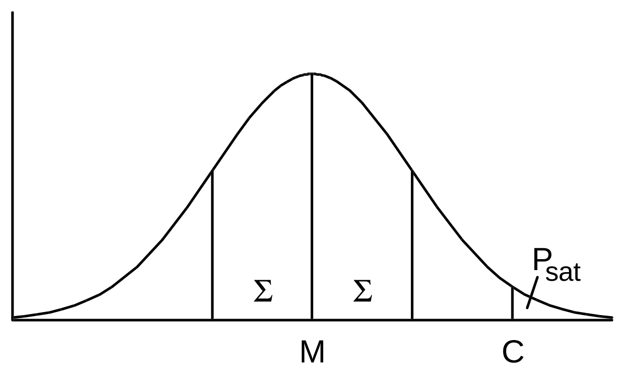
$$\begin{cases} M & = n \cdot m & = \text{koko liikennevirran keskinopeus, } \mathrm{E}[X], \\ \Sigma^2 & = n \cdot \sigma^2 & = \text{koko liikennevirran nopeuden varianssi, } \mathrm{V}[X] \end{cases}$$

- Jos n on suuri, pätee likimain $X \sim \mathrm{N}(M, \Sigma^2)$
- Saturaatiotodennäköisyys on tällöin

$$P_{\mathrm{sat}} = Q\left(\frac{C - M}{\Sigma}\right)$$

missä

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$



Normaaliapproksimaatio – efektiivinen kaista

- Taso P_{sat} edellyttää vähintään kapasiteettia C

$$C \geq M + Q^{-1}(P_{\text{sat}}) \cdot \Sigma$$

- Merkitään todennäköisyyttä $1 - P_{\text{sat}}$ vastaava N(0,1)-jakauman fraktiilipistettä η:lla

$$\eta = Q^{-1}(P_{\text{sat}})$$

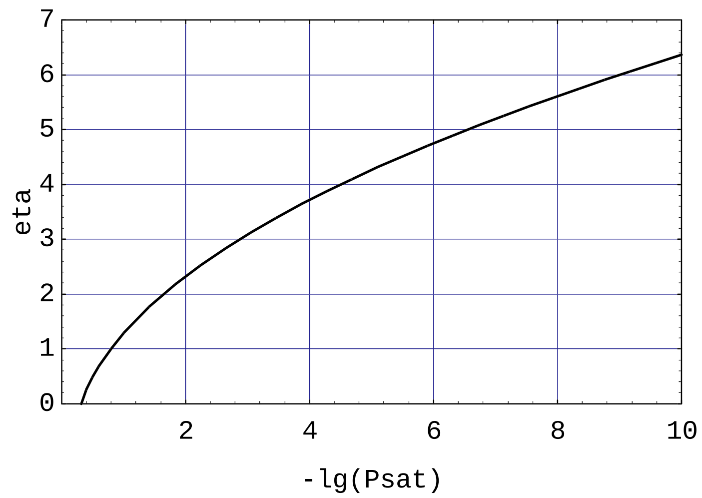
- M:n ja Σ^2:n määritelmiä käyttäen

$$C \geq n \cdot m + \eta\sqrt{n} \cdot \sigma$$

- Tarvittava kaista yhtä virtaa kohti eli efektiivinen kaista

$$\boxed{B_{\text{eff}} = m + \frac{\eta \cdot \sigma}{\sqrt{n}}}$$

- Efektiivinen kaista lähenee keskinopeutta n:n kasvaessa



Momenttien generoiva funktio

- Satunnaismuuttujan X momenttien generoiva funktio

  $$M(\beta) = \mathrm{E}[e^{\beta X}] = \int e^{\beta x} f(x)dx$$

- Logaritminen momenttien generoiva funktio

  $$\varphi(\beta) = \log M(\beta)$$

Arvot origossa:

$$\begin{cases} M(0) &= 1 \\ \varphi(0) &= 0 \end{cases}$$

- Momentit voidaan laskea näiden avulla

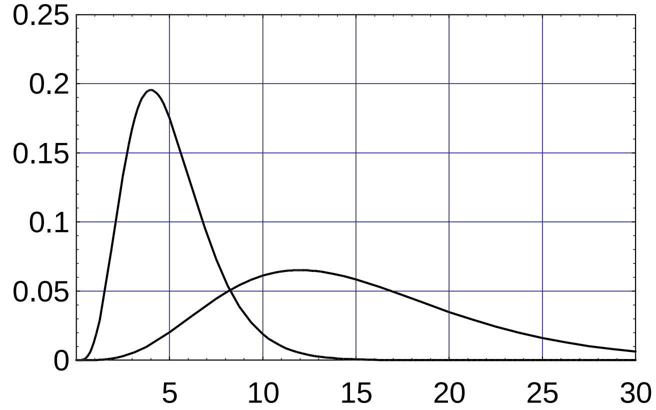
$$\begin{cases} m = \mathrm{E}[X] = M'(0) = \varphi'(0) \\ \qquad \mathrm{E}[X^2] = M''(0) \\ \sigma^2 = \mathrm{V}[X^2] = M''(0) - M'(0)^2 = \varphi''(0) \end{cases}$$

- <u>Additiivisuus</u>: Jos $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, missä $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden lmgf:t ovat $\varphi_1(\beta),\ \varphi_2(\beta), \ldots,\ \varphi_n(\beta)$, niin

$$\begin{aligned}
\varphi(\beta) &= \log \mathrm{E}[e^{\beta X}] \\
&= \log \mathrm{E}[e^{\beta(X_1+X_2+\ldots+X_n)}] \\
&= \log \mathrm{E}[e^{\beta X_1} e^{\beta X_2} \cdots e^{\beta X_n}] \\
&= \log(\mathrm{E}[e^{\beta X_1}] \cdot \mathrm{E}[e^{\beta X_2}] \cdots \mathrm{E}[e^{\beta X_n}]) \\
&= \log \mathrm{E}[e^{\beta X_1}] + \log \mathrm{E}[e^{\beta X_2}] + \ldots + \log \mathrm{E}[e^{\beta X_n}] \\
&= \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta) + \ldots + \varphi_n(\beta)
\end{aligned}$$

Vinoutettu jakauma

- Olkoon X:n tiheysfunktio $f(x)$
- Vinoutettu l. siirretty jakauma $f_\beta(x)$



$$f_\beta(x) = \frac{e^{\beta x} f(x)}{M(\beta)} = e^{\beta x - \varphi(\beta)} f(x)$$

  – X:n suuret arvot tulevat todennäköisemmiksi
  – jakauman massa siirtyy kohti suurempia arvoja
  – momenttien generoiva funktio $M(\beta)$ toimii normitustekijänä

- Kääntäen $f(x)$ voidaan lausua $f_\beta(x)$:n avulla

$$f(x) = e^{-\beta x + \varphi(\beta)} f_\beta(x)$$

- Vinoutus voidaan määritellä olettamatta jatkuvuutta
- Todennäköisyysmitan vinoutus

$$dP_\beta(x) = e^{\beta x - \varphi(\beta)} dP(x)$$

- Merkitään $\mathrm{E}_\beta[\cdot] =$ odotusarvo mitan P_β suhteen

Vinoutettu jakauma – jatkoa

- Vinoutetun jakauman momentit

$$\begin{cases} \mathrm{E}_\beta[X] &= \dfrac{\mathrm{E}[Xe^{\beta X}]}{M(\beta)} &= \dfrac{M'(\beta)}{M(\beta)} = \varphi'(\beta) \\ \mathrm{E}_\beta[X^2] &= \dfrac{\mathrm{E}[X^2e^{\beta X}]}{M(\beta)} &= \dfrac{M''(\beta)}{M(\beta)} \\ \mathrm{V}_\beta[X] &= &= \dfrac{M''(\beta)}{M(\beta)} - \dfrac{M'(\beta)^2}{M(\beta)^2} \; = \; \varphi''(\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(\beta) &= \varphi'(\beta) \\ \sigma^2(\beta) &= \varphi''(\beta) \end{cases}$$

Vinoutettu jakauma – jatkoa

- Vinoutettujen momenttien additiivisuus: Jos $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, missä $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ ovat riippumattomia, niin lmgf-funktioiden additiivisuudesta seuraa

  $$\begin{cases} m(\beta) &= m_1(\beta) + m_2(\beta) + \ldots + m_n(\beta) \\ \sigma_1^2(\beta) &= \sigma_1^2(\beta) + \sigma_2^2(\beta) + \ldots + \sigma_n^2(\beta) \end{cases}$$

  missä $m_i(\beta)$ ja $\sigma_i^2(\beta)$ ovat muuttujan X_i odotusarvo ja varianssi vinoutetun jakauman suhteen

- Pätee enemmänkin:

  Riippumattomien satunnaismuuttujien summan X vinoutettu jakauma on sama kuin kyseisten muuttujien X_i vinoutettuja jakaumia noudattavien riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma:

  $$\begin{array}{ccc} & \overset{\text{summa}}{\Longrightarrow} & \\ \text{vinoutus} \Downarrow & & \Downarrow \text{vinoutus} \\ & \underset{\text{summa}}{\Longrightarrow} & \end{array}$$

Vinoutettu jakauma – esimerkki 1

- Eksponenttijakauma $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
- Tiheysfunktio $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$\begin{cases} M(\beta) &= \mathrm{E}[e^{\beta X}] = \int_0^\infty \lambda\, e^{-(\lambda-\beta)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-\beta}, \\ \varphi(\beta) &= \log M(\beta) = \log\lambda - \log(\lambda-\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(\beta) &= \varphi'(\beta) = \frac{1}{\lambda-\beta} \\ \sigma^2(\beta) &= \varphi''(\beta) = \frac{1}{(\lambda-\beta)^2} \end{cases}$$

- Vinoutettu jakauma

$$f_\beta(x) = (\lambda-\beta)e^{-(\lambda-\beta)x}$$

– on myös eksponentiaalinen

– parametri $\lambda - \beta$

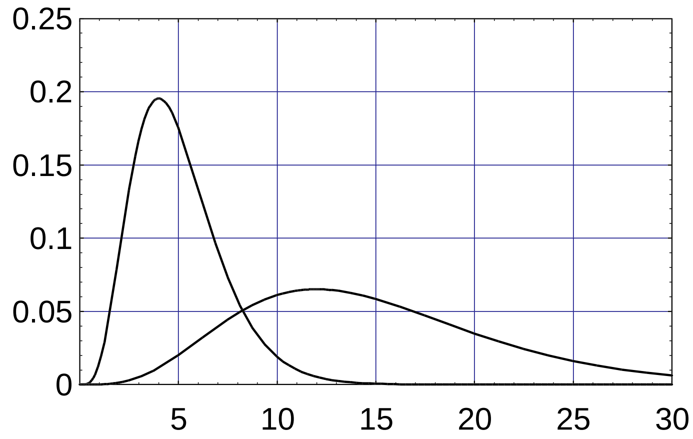
Vinoutettu jakauma – esimerkki 2

- X on n:n riippumattoman eksponenttijakautuneen muuttujan summa
- $X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$
- Tiheysfunktio on

$$f(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\lambda x)}$$

- Vinoutettu jakauma:
  n:n vinoutetun $\text{Exp}(\lambda - \beta)$-jakautuneen muuttujan summan jakauma
- $\text{Erlang}(n, \lambda - \beta)$-jakautuma
- Keskiarvo ja varianssi

$$\begin{cases} m(\beta) = \dfrac{n}{\lambda - \beta} \\ \sigma^2(\beta) = \dfrac{n}{(\lambda - \beta)^2} \end{cases}$$



Viiden Exp(1)-jakautuneen muuttujan summan jakauma ja vastaava vinoutettu jakauma vinoutusparametrilla $\beta = \frac{2}{3}$.

Vinoutettu jakauma – Yhteenvetotaulukko

- Tavallisissa jakaumaperheissä vinoutettu jakauma kuuluu samaan perheeseen
- Vinoutetun jakauman keskiarvo ja varianssi noudattavat kyseisen perheen tunnettuja kaavoja

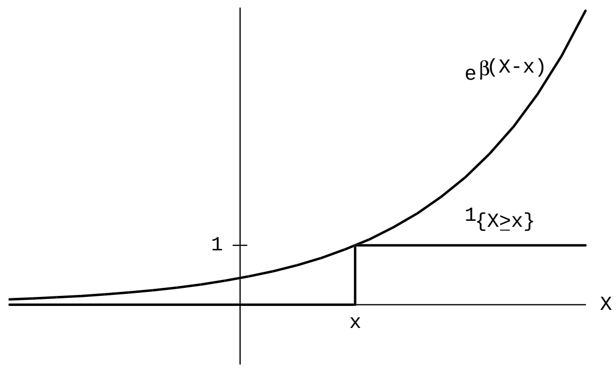
Jakauma	Vinoutettu	$m(\beta)$	$\sigma^2(\beta)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\mathrm{Bin}(n, \frac{pe^\beta}{1-p+pe^\beta})$	$\frac{npe^\beta}{1-p+pe^\beta}$	$\frac{n(1-p)pe^\beta}{(1-p+pe^\beta)^2}$
$\mathrm{Erlang}(n,\lambda)$	$\mathrm{Erlang}(n,\lambda-\beta)$	$\frac{n}{\lambda-\beta}$	$\frac{n}{(\lambda-\beta)^2}$
$\mathrm{Poisson}(a)$	$\mathrm{Poisson}(ae^\beta)$	ae^β	ae^β
$\mathrm{N}(m,\sigma^2)$	$\mathrm{N}(m+\sigma^2\beta,\sigma^2)$	$m+\sigma^2\beta$	σ^2

Taulukko 1: Eräiden jakaumien siirretyt jakaumat ja näiden parametrit.

- Bernoulli-jakauma on erikoistapaus binomijakaumasta: $\mathrm{Bernoulli}(p) \sim \mathrm{Bin}(1,p)$
- Eksponenttijakauma on erikoistapaus Erlang-jakaumasta: $\mathrm{Exp}(\lambda) \sim \mathrm{Erlang}(1,\lambda)$
- χ^2-jakauma on erikoistapaus Erlang-jakaumasta: $\chi^2(n) \sim \mathrm{Erlang}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

Chernoffin raja

- Kaikilla arvoilla $\beta \geq 0$ pätee



$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X \geq x\} &= \mathrm{E}[1_{\{X \geq x\}}] \\ &\leq \mathrm{E}[e^{\beta(X-x)}] \\ &= e^{-\beta x}\mathrm{E}[e^{\beta X}] \\ &= e^{\varphi(\beta)-\beta x} \end{aligned}$$

sillä $e^{\beta(X-x)} \geq 1_{\{X \geq x\}}$.

- Tällöin pätee myös $\mathrm{P}\{X \geq x\} \leq \inf_\beta e^{-\beta x + \varphi(\beta)}$
- Merkitään β_x:llä sitä β:n arvoa, jolla minimi saavutetaan.
- Chernoffin yläraja

$$\boxed{\mathrm{P}\{X \geq x\} \leq e^{-\beta_x x + \varphi(\beta_x)}}$$

- Arvo β_x löydetään minimoimalla eksponentti.

$$\varphi'(\beta_x) = x \quad \text{eli} \quad m(\beta_x) = x$$

- Vinoutetun jakauman keskiarvo siirretään pisteeseen x.

Cramérin teoreema

- Olkoon $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
  - X_i:t riippumattomia ja samoinjakautuneita
  - komponenttimuuttujien yhteinen lmgf on $\varphi(\beta)$
  - X:n lmgf on $n\,\varphi(\beta)$
- Tutkitaan keskiarvon $\frac{1}{n}X$:n ylitystodennäköisyyttä

$$\mathrm{P}\{\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \geq x\}$$

- Sovelletaan Chernoffin rajaa

$$\mathrm{P}\{\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \geq x\} = \mathrm{P}\{X \geq n\,x\} \leq e^{-n(\beta_x x - \varphi(\beta_x))}$$

- β_x määräytyy ehdosta $n\,\varphi'(\beta_x) = n\,x \quad$ eli $\quad \varphi'(\beta_x) = x.$
- Vauhtifunktio $I(x) = \sup_\beta(\beta x - \varphi(\beta)) = \beta_x x - \varphi(\beta_x)$.
- Keskiarvon ylitystodennäköisyys

$$\mathrm{P}\{\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \geq x\} \leq e^{-nI(x)}$$

- Cramérin teoreema: yläraja on asymptoottisesti tarkka

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{P}\{\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \geq x\} = -I(x)}$$

Yhteenvetotaulukko

- Taulukkoon on valmiiksi laskettu
  - tasoa x vastaava vinoutusparametri
  - vinoutetun jakauman varianssi vinoutuksella β_x
  - vauhtifunktio $I(x)$

Jakauma	β_x	$\sigma^2(\beta_x)$	$I(x)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\log\frac{\frac{x}{n}(1-p)}{(1-\frac{x}{n})p}$	$x(1-\frac{x}{n})$	$x\log\frac{\frac{x}{n}(1-p)}{(1-\frac{x}{n})p}+n\log\frac{1-\frac{x}{n}}{1-p}$
$\mathrm{Erlang}(n,\lambda)$	$\lambda-\frac{n}{x}$	$\frac{x^2}{n}$	$x\lambda-n-n\log(\frac{x\lambda}{n})$
$\mathrm{Poisson}(a)$	$\log\frac{x}{a}$	x	$x\log\frac{x}{a}+a-x$
$\mathrm{N}(m,\sigma^2)$	$\frac{x-m}{\sigma^2}$	σ^2	$\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2$

Tarkempi approksimaatio

- Chernoffin raja vinoutetun jakauman avulla

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X \geq x\} &= \int_x^\infty f(y)dy \\ &= \int_x^\infty e^{-\beta y+\varphi(\beta)} f_\beta(y)dy \\ &= e^{-\beta x+\varphi(\beta)} \int_x^\infty e^{-\beta(y-x)} f_\beta(y)dy \end{aligned}$$

- Integroimisalueessa pätee $e^{-\beta(y-x)} \leq 1$
  $\Rightarrow$ koko integraali ≤ 1
  $\Rightarrow \mathrm{P}\{X \geq x\} \leq e^{-\beta x+\varphi(\beta)}$
  $\Rightarrow$ Chernoffin raja $e^{-\beta_x x+\varphi(\beta_x)}$ saadaan minimoimalla β:n suhteen
- Tiukin raja saavutetaan arvolla β_x, jolla $m(\beta_x) = x$
  - jakauman $f_{\beta_x}(\cdot)$ keskiarvo sijaitsee pisteeseessä x
- Keskiarvon lähellä normaalijakauma $\mathrm{N}(x, \sigma^2(\beta_x))$ on kohtuullinen approksimaatio

$$f_{\beta_x}(y) \approx \frac{e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2/\sigma^2(\beta_x)}}{\sqrt{2\pi}\sigma(\beta_x)}$$

Tarkempi approksimaatio (jatkoa)

- Tällöin (olettaen $\beta_x \sigma(\beta_x) \gg 1$)

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-\beta_x(y-x)} f_{\beta_x}(y)dy &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\beta_x)} \int_x^\infty e^{-\beta_x(y-x)} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2/\sigma^2(\beta_x)} dy \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta_x \sigma(\beta_x)}\end{aligned}$$

- Saadaan (melko tarkka) likiarvo – ei enää yläraja

$$\boxed{\mathrm{P}\{X \geq x\} \approx \frac{e^{-I(x)}}{\sqrt{2\pi}\beta_x \sigma(\beta_x)}}$$

Keskiarvon ylitystodennäköisyys ja menetystodennäköisyys

- Keskiarvolle pätee tarkemman approksimaation mukaisesti

$$\mathrm{P}\{\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \geq x\} \approx \frac{e^{-nI(x)}}{\sqrt{2\pi n}\,\beta_x \sigma(\beta_x)}$$

  - $I(x)$ on yhden komponenttimuuttujan vauhtifunktio
  - $\sigma(\beta_x)$ on yhden komponentin vinoutettu hajonta
  - summan vinoutetun jakauman hajonta on $\sqrt{n}$-kertainen
  - tästä johtuu nimittäjään ilmestynyt n

- P_{loss} voidaan arvioida seuraavasti

$$P_{\mathrm{loss}} = \frac{1}{m}\mathrm{E}[(X-x)^+] = \frac{1}{m} e^{-\beta x + \varphi(\beta)} \int_x^\infty (y-x) e^{-\beta(y-x)} f_\beta(y) dy$$

- Valitaan β:lle arvo β_x

$$\int_x^\infty (y-x) e^{-\beta(y-x)} f_\beta(y) dy \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\beta_x)} \int_x^\infty (y-x) e^{-\beta_x(y-x)} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2/\sigma^2(\beta_x)} dy \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta_x^2 \sigma(\beta_x)}$$

josta seuraa

$$\boxed{P_{\mathrm{loss}} = \frac{1}{m}\mathrm{E}[(X-x)^+] \approx \frac{e^{-I(x)}}{\sqrt{2\pi} m \beta_x^2 \sigma(\beta_x)}}$$

Esimerkki: Ylitystodennäköisyyden laskeminen

- Millä todennäköisyydellä viiden Exp(1)-jakautuneen sm:n summa ylittää arvon $x = 15$?
- $X \sim \text{Erlang}(5, 1)$
- Tarkka tulos: $\text{P}\{X \geq 15\} = 22403 e^{-15}/8 \approx 8.566\,10^{-4}$
- Tiedetään $\text{E}[X] = \text{V}[X] = 5$
- Normaaliapproksimaatio, $X \sim N(5, 5)$: $P_{\text{sat}} \approx Q(\frac{15-5}{\sqrt{5}}) \approx 3.87\,10^{-6}$
- Chernoffin raja: $P_{\text{sat}} \leq e^{-5I(15/5)} \approx 1.10\,10^{-2}$

  missä $I(x) = x - 1 - \log x$ on yhden komponentin vauhtifunktio
- Tarkennettu approksimaatio: $$P_{\text{sat}} \approx \frac{e^{-5I(15/5)}}{\sqrt{2\pi 5}(2/3)(15/5)} \approx 9.84\,10^{-4}$$

  missä $$\begin{cases} I(x) = x - 1 - \log x \text{ on yhden komponentin vauhtifunktio} \\ \beta_x = 1 - 1/3 = 2/3 \\ \sigma^2(\beta_x) = x^2 \end{cases}$$

  - normaaliapproksimaatio on liian optimistinen
  - Chernoffin yläraja on hyvin konservatiivinen
  - tarkennettu approksimaatio on kohtuullisen tarkka

Kutsujen hyväksyminen – efektiivinen kaista

$$\begin{cases} K & = \text{ lähdetyyppien lukumäärä; lähdeindeksi } k = 1, \ldots, K \\ \varphi_k(\beta) & = \text{ lähdetyypin } k \text{ logaritminen momenttien generoiva funktio (oletetaan tunnetuksi)} \\ n_k & = \text{ tyypin } k \text{ lähteiden lukumäärä} \\ c & = \text{ linkin kapasiteetti} \end{cases}$$

Hyväksymisehto ylivuotokriteerin mukaan: $P_{\text{loss}} \leq \epsilon$ (ϵ on annettu suurin sallittu arvo)

Ylivuototodennäköisyys voidaan arvioida edellä esitetyn mukaisesti

$$P_{\text{loss}} \approx \frac{e^{-I(c)}}{\sqrt{2\pi} m\, \beta^2\, \sigma(\beta)}$$

missä

$$\begin{cases} I(c) & = \beta\, c - \sum_k n_k\, \varphi_k(\beta) \\ \sigma^2(\beta) & = \sum_k n_k\, \sigma_k^2(\beta) = \sum_k n_k\, \varphi_k''(\beta) \end{cases}$$

ja β määräytyy ehdosta

$$m(\beta) = c \quad \text{eli} \quad \sum_k n_k\, \varphi_k'(\beta) = c$$

Ylivuototodennäköisyyden arvioimiseksi tarvitsee ainoastaan ratkaista tämä yhtälö (numeerisesti) ja sijoittaa saatu β edellisiin lausekkeisiin. – Tämä on huomattavan helppoa verrattuna tarkan laskennan edellyttämään jakaumien konvoluointiin ($\sum_k n_k - 1$ konvoluutiota).

Kutsujen hyväksyminen – efektiivinen kaista (jatkoa)

Yhteyksien lukumäärävektori $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_K)$ määrää liikennesekoituksen (liikenneprofiili).

Annetulla sekoituksella $\mathbf{n}$ ja kapasiteetilla c voidaan laskea P_{loss},

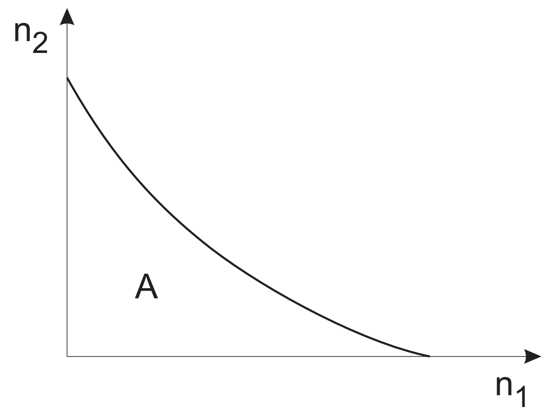
$$P_{\text{loss}} = P_{\text{loss}}(\mathbf{n}, c)$$

Tämän avulla voidaan kääntäen selvittää hyväksymisalue A (yleensä konkaavi)

$$A = \{\mathbf{n} : \; P_{\text{loss}}(\mathbf{n}, c) \leq \epsilon\}$$

eli kaikki hyväksyttävissä olevat liikennesekoitukset $\mathbf{n}$, joilla $P_{\text{loss}} \leq \epsilon$.

Järjestelmään voidaan ottaa kuljetettavaksi uusia yhteyksiä niin kauan kuin $\mathbf{n}$ pysyy alueessa A.



Kutsujen hyväksyminen – efektiivinen kaista (jatkoa)

Jos liikennetyypit eivät eroa toisistaan liian paljon, hyväksymisalueen reuna on likimain suora (hypertaso)

$$\sum_k n_k B_k \le c, \quad \text{missä efektiivinen kaista } B_k \text{ on} \quad B_k = \frac{c}{n_k(c)}$$

ja $n_k(c)$ ilmoittaa, kuinka monta tyypin k yhteyttä yksinään linkille c mahtuu siten, että $P_{\text{loss}} \le \epsilon$.

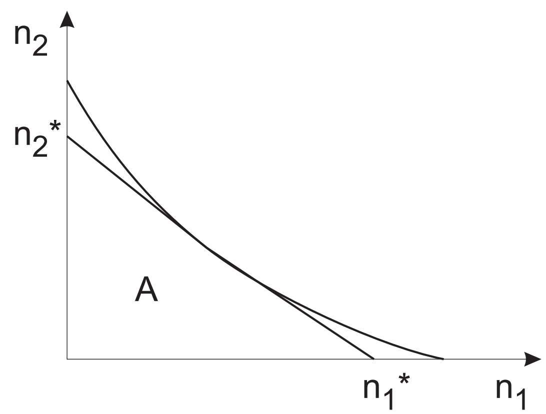
Jos liikennetyypit ovat hyvin erilaiset, tasoapproksimaatio ei ole kovin tarkka.

Hyväksymisalueen reunan mielivaltainen tangenttitaso määrittelee turvallisen hyväksymisalueen.

Efektiivisenä kaistana voidaan pitää arvoa

$$B_k = c/n_k^*$$

missä n_k^* on arvo, jossa asetettu tangenttitaso leikkaa n_k-akselin.



Efektiivisen kaistan karkea likiarvokaava

Suuruusluokkalaskelmissa voidaan käyttää Lindbergerin likiarvokaavaa

$$\boxed{B_k = 1.2 m_k + 60 \sigma_k^2 / c}$$

Jos lähteestä tunnetaan vain keskinopeus m_k ja huippunopeus h_k, voidaan vielä tehdä pahimman tapauksen arvio:

- Lähteen oletetaan olevan "on/off"-tyyppinen lähde
  - lähde on välillä päällä huippunopeudella h_k
  - välillä pois päältä siten, että keskinopeus on m_k

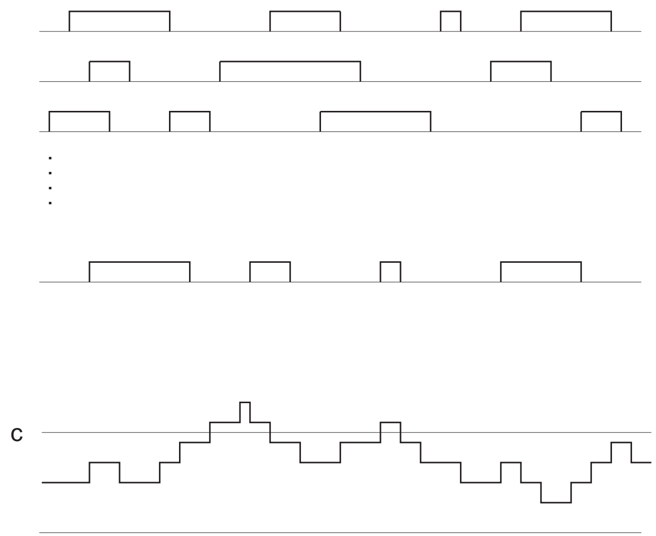
Tällöin on helppo osoittaa, että

$$\boxed{\sigma_k^2 = m_k (h_k - m_k)}$$

Efektiivinen kaista on/off-lähteiden tapauksessa

Edellä esitetty suurten poikkeamien teoriaan perustuva menetelmä antaa varsin tarkan keinon ylivuototodennäköisyyden arvioimiseksi mielivaltaisella liikennesekoituksella.

Joissakin tapauksissa ylivuototodennäköisyys voidaan laskea eksktisti. Tärkein näistä on keskenään samanlaisten “on/off”-lähteiden tapaus.



- n keskenään tilastollisesti identtistä lähdettä
- lähteen nopeus “on”-tilassa h (huippunopeus)
- “on”-tilan todennäköisyys α
- “off”-tilan todennäköisyys $1-\alpha$
- lähteen keskinopeus $m = \alpha\, h$

Huippunopeuden mukaan allokoitaessa, voidaan sallia n_0 lähdettä: $n_0 = c/h$

Kun lähteitä on paljon eikä α ole aivan lähellä ykköstä, on hyvin epätodennäköistä, että kaikki lähteet olisivat yhtäaikaisesti päällä.

- Lähteet limittyvät tilastollisesti keskenään.
- Kun sallitaan pieni ylivuodon mahdollisuus, sallittua yhteyksien määrää voidaan merkittävästi kasvattaa (ns. tilastollisen multipleksoinnin hyöty eli limityshyöty G).

Efektiivinen kaista on/off-lähteiden tapauksessa (jatkoa)

Todennäköisyys p_i, että i lähdettä n:stä on samanaikaisesti aktiivitilassa

$$p_i = \binom{n}{i}\alpha^i(1-\alpha)^{n-i}$$

Ylivuototodennäköisyys on siten

$$P_{\text{loss}}(n, n_0, \alpha) = \frac{1}{nm}\sum_{i=\lceil n_0 \rceil}^{n} p_i \cdot (i - n_0)h = \frac{1}{n\alpha}\sum_{i=\lceil n_0 \rceil}^{n} p_i \cdot (i - n_0)$$

Suurin hyväksyttävä määrä yhteyksiä $n_\epsilon(n_0, \alpha)$ määräytyy ehdosta

$$P_{\text{loss}}(n_\epsilon, n_0, \alpha) \leq \epsilon$$

Yhden yhteyden efektiivinen kaista B_{eff} $(m \leq B_{\text{eff}} \leq h)$

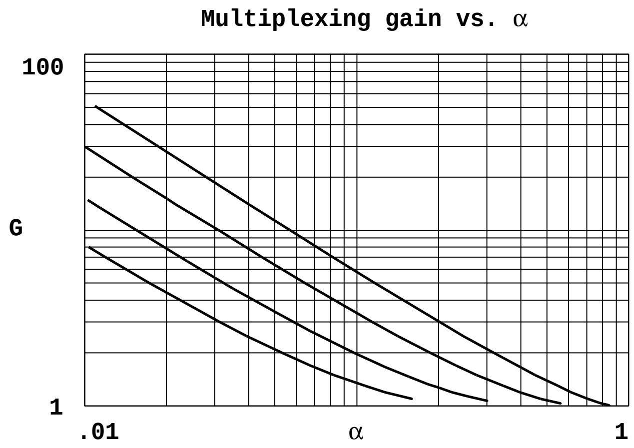
$$B_{\text{eff}} = \frac{c}{n_\epsilon} = \frac{n_0}{n_\epsilon} \cdot h$$

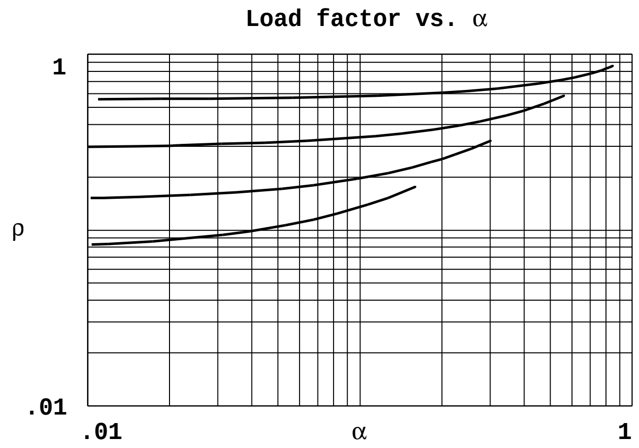
- Limityshyöty (multipleksointihyöty) $G = n_\epsilon / n_0 = h / B_{\text{eff}}$
- Sallittu kuormitus $\rho = n_\epsilon m / c = n_\epsilon \alpha h / c = \alpha n_\epsilon / n_0 = \alpha G$

Efektiivinen kaista on/off-lähteiden tapauksessa (jatkoa)

Tilastollisen multipleksoinnin tehokkuutta voidaan mitata joko limityshyödyn G tai sallitun kuorman $\rho = \alpha G$ avulla (kumpaankin sisältyy sama informaatio).

- Alla olevissa kuvissa nähdään G ja ρ riippuvuus α:sta arvolla $\epsilon = 10^{-9}$.
- Käyräparametrina on $n_0 = c/h$ (alhaalta lukien arvot 10, 15,30,100).





- Pienillä arvoilla α (purskeinen liikenne) limityshyöty voi olla suuri.
- Sallittu kuormitus kuitenkin riippuu lähinnä vain käyräparametrista c/h.
- Kohtuullisen käyttöasteen saavuttaminen puskurittomassa systeemissä edellyttää, että yksittäisen lähteen huippunopeus on vain pieni osa linkin nopeudesta (1% tai alle).